Prova scritta di Fisica 2 20.3.2018

Esercizio n.1 **[11 punti]**

ısideriamo una sfera conduttrice di raggio **a** caricata con una carica $\mathbf{Q_a}$. Esternamente a questa sfera è posta una sottile ɪerficie sferica conduttrice di raggio **b**, concentrica con la prima sfera. Si chiede: A) Calcolare il valore della carica $\mathbf{Q_b}$ che ɪo fornire alla superficie sferica perché la sfera di raggio **a** abbia potenziale elettrostatico nullo. Si assuma nullo il potenziale infinito. B) Una volta calcolata l'espressione della carica Q_b fare i grafici dell'andamento del campo Elettrico e del potenziale elettrostatico in to lo spazio per il sistema in esame.

ti: $Q_a = 1\,\mu C$; $b = 3$ cm ; $a = 2$ cm

ılcoliamo il campo elettrico, che sarà radiale, e l potenziale nelle tre regioni di spazio

$r<a \quad E_1 = 0 \quad V_1 = \text{costante}$

$a \leq r \leq b \quad E_2 = \dfrac{K Q_a}{r^2} \quad V_2(r) = \dfrac{K Q_a}{r} + C_2 \qquad K = 1/4\pi\varepsilon_0$

3) $b \leq r \quad E_3 = K\dfrac{Q_a+Q_b}{r^2} \quad V_3(r) = K\dfrac{Q_a+Q_b}{r} + C_3$

- $V_3(\infty) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$
- Continuità: $V_2(b) = V_3(b) \qquad \dfrac{KQ_a}{b} + C_2 = K\dfrac{Q_a+Q_b}{b}$

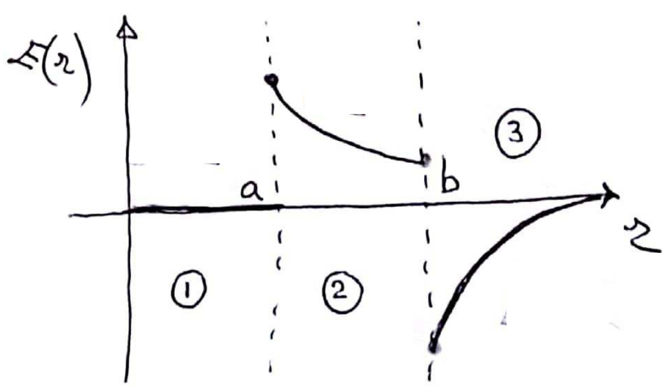
quindi $C_2 = KQ_b/b \Rightarrow V_2(r) = K\left(\dfrac{Q_a}{r} + \dfrac{Q_b}{b}\right)$

Se $V_2(a) = 0 \Rightarrow K\left(\dfrac{Q_a}{a} + \dfrac{Q_b}{b}\right) = 0 \Rightarrow Q_b = -\dfrac{b}{a} Q_a$

$= -\dfrac{3}{2}\,\mu C$

$= -1{,}5\,\mu C$

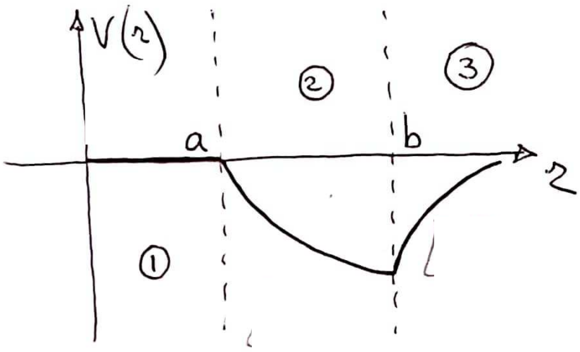
B) $E_1(r) = 0 \ , \ E_2(r) = \dfrac{KQ_a}{r^2} \ , \ E_3(r) = -\dfrac{KQ_a}{r^2}\dfrac{b-a}{a}$



$$V_3(r) = K\,\frac{Q_a+Q_b}{r} = -K Q_a \frac{b-a}{a}\,\frac{1}{r}$$

$$V_2(r) = K\left(\frac{Q_a}{r} + \frac{Q_b}{b}\right) = +K Q_a\left(\frac{-1}{a} + \frac{1}{r}\right)$$

$$V_1(r) = V_2(a) = 0$$



① $V_1(r) = C_1 = V_1(a) = 0$

② $V_2(r) = \frac{KQ_a}{r} + C_2 \qquad V_2(a) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{KQ_a}{a} \Rightarrow V_2(r) = KQ_a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$

③ $V_3(r) = K\frac{Q_a+Q_b}{r} + C_3 \qquad V_3(\infty) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$V_3(b) = V_2(b) \qquad KQ_a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = K\frac{Q_a+Q_b}{b} \qquad \cancel{\frac{KQ_a}{b}} - \frac{KQ_a}{a} = K\frac{\cancel{Q_a}+Q_b}{b}$

$\Rightarrow Q_B = -\frac{b}{a} Q_a$

$$\Delta V_{ab} = V(b) - V(a) = KQ_a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = KQ_a\frac{a-b}{ab} \quad (< 0)$$

$$\Delta V_{b\infty} = V(\infty) - V(b) = 0 - K\frac{Q_a+Q_b}{b}$$

$$\Delta V_{ab} + \Delta V_{b\infty} = \cancel{V(b)} - V(a) + V(\infty) - \cancel{V(b)} = V(\infty) - V(a) = 0$$

$$\cancel{K} Q_a \frac{a-b}{a\cancel{b}} = +\cancel{K}\frac{Q_a+Q_b}{\cancel{b}} \qquad \cancel{Q_a a} - Q_a b = \cancel{+Q_a a} + Q_b a$$

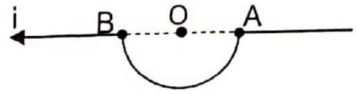
$$Q_b = -\frac{b}{a} Q_a$$

Prova scritta di Fisica 2

20.3.2018

Esercizio n.2 **[8 punti]**

Un filo infinito, percorso da una corrente costante i, ha una parte – quella fra A e B – che assume la forma di una semicirconferenza di raggio $R = \overline{AB}/2$. Calcolare il campo B nel punto O, centro della semicirconferenza, in modulo, direzione e verso, se diverso da zero.



Dati: i = 100 mA ; R=(3,14 cm) = 31,4 mm

Il campo $\overline{B}$ vale in generale $d\overline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\overline{l} \times \hat{r}}{r^2}$

- Il contributo dei due lati rettilinei è nullo essendo $\hat{r} \parallel d\overline{l}$.
- Ogni tratto $d\overline{l}$ della semicirconferenza dà un campo $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{R^2}$ (⊥ foglio ed entrante) ∴

In totale ho, $B = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R\, d\alpha}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\cancel{\pi}} i \frac{\cancel{\pi}}{R}$ ∴

$$= \frac{\mu_0 i}{R \cdot 4} = \frac{\cancel{4\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}1}{\cancel{\pi \cdot 4} \cdot 10^{-2}} = 10^{-6}\,T = 1\,\mu T \therefore$$

Anche: $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{\pi R} \frac{dl}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4R}$

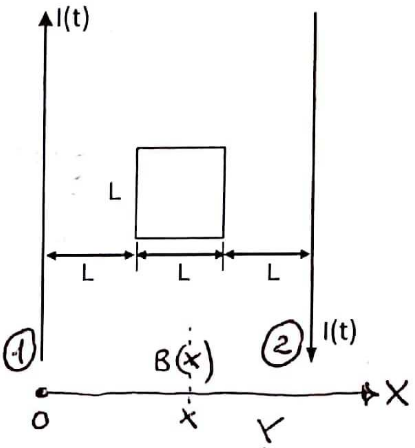
oppure: $B(\text{spira}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{(R^2+h^2)^{3/2}} \xrightarrow[h=0]{\text{asse}} = \frac{\mu_0}{2\cancel{\pi}} \frac{I \cancel{\pi} R^{\cancel{2}}}{R^{\cancel{3}}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}$

$B(1/2 \text{ spire}) = \frac{\mu_0 i}{4R}$ [va spiegato perché si divide per due]

Prova scritta di Fisica 2 calcolare il valore dell'... 20.3.2018

Esercizio n.3 [11 punti]

Nel vuoto sono posti due fili paralleli infiniti percorsi da due correnti I(t) uguali ma con versi opposti. Fra i due fili è posta una spira quadrata di lato L giacente nel piano individuato dai due fili (vedi figura). La spira ha una resistenza elettrica R. Scrivere l'espressione analitica della f.e.m. indotta nella spira e l'energia dissipata in essa dall'istante t=0 fino a quando il sistema non si trova in uno stato stazionario. Sia $I(t) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

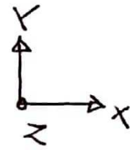


Dati: $I_0 = 10\,A$; $\tau = 1\,\mu s$; $L = 10\,cm$ $\times 10^{-2}$; $R = 8\ \Omega$;

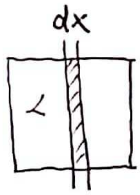
Il campo creato da un filo ∞ è

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I(t)}{x} \quad \text{in circonferenze} \perp \text{filo.}$$

Assumendo un asse x come in figura ho:



$$\left.\begin{aligned} B_1(x) &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I(t)}{x}(-\hat{z}) \\ B_2(x) &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I(t)}{3L-x}(-\hat{z}) \end{aligned}\right\} B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t)\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3L-x}\right](-\hat{z})$$



$$\left[f.e.m. = -\frac{d\phi(B)}{dt}\right] \qquad d\phi(B)_{dx} = B \cdot dx \cdot L$$

$$\text{da cui } \phi(B) = \int_L^{2L} d\phi(B) = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \cdot L \int_L^{2L} dx \cdot \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{3L-x}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I(t) \cdot L}{2\pi}\Big[\underbrace{\ln\frac{2L}{L} - \ln\frac{3L-2L}{3L-L}}_{2\ln 2}\Big] = \frac{\mu_0 I(t)}{\pi} L \ln 2$$

$$\therefore\ f.e.m. = -\frac{d}{dt}\phi(B) = \underbrace{\frac{L\mu_0 \ln 2}{\pi\tau} I_0}_{=A} e^{-t/\tau} = A e^{-t/\tau}$$

$$\mathcal{E}\Big|_0^\infty = \int_0^\infty \frac{f^2}{R}\,dt \ [1] = \frac{A^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}\,dt = \frac{A^2}{R}\frac{\tau}{2} = \left[\frac{L\mu_0 \ln 2}{\tau\pi} I_0\right]^2 [2] \ \frac{10^{-6}}{16 \times 10^{-2}}\Bigg) \frac{10^{-4}}{16}$$

$$A^2 = \frac{10^{-2} \cdot 16 \cdot 10^{-14}}{10^{-12}}\frac{10^2}{2} \cong \frac{16}{2} \cdot 10^{-2} \qquad \cong \frac{16}{2}10^{-2} \cdot \frac{10^{-4}}{16} \cong 0{,}5 \times 10^{-6}\ J$$

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.
$\sqrt{3} = 1{,}7$; $\sqrt{5} = 2{,}2$; $\sqrt{6} = 2{,}4$; $\sqrt{7} = 2{,}6$; ln 2 = 0,7 ; ln 3 = 1,1 ; ln 4 = 1,4 ; ln 5 = 1,6

$[\ln 2]^2 \sim 0{,}5$

Anche $B_{TOT}(x) = 2\left(B(x)\right)_{filo\,1} = 2\,\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I(t)}{x} = \frac{\mu_0}{\pi}\,\frac{I(t)}{x}$

$$d\phi(x) = B_T(x)\,dx \cdot \ell \qquad \phi_{TOT} = \int_{\ell}^{2\ell} \frac{\mu_0 I(t)}{\pi x}\,\ell\,dx =$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)\ell}{\pi}\ln\frac{2\ell}{\ell} = \frac{\mu\ell}{\pi}\ln 2 \cdot I(t)$$